

Die Mathematik der Entscheidungen

Mit Operations Research zu bestmöglichen Handlungsempfehlungen

Our world is full of decision and planning situations of a combinatorial flavor. We seek sequences in production planning, configurations of machine setups, routes in networks. Mathematical optimization helps modeling such planning tasks and offers algorithms for solving them in a provably best possible way. When this technology is applied in business and management contexts to support decision makers, we speak of operations research. It has countless applications in production, logistics, mobility, energy, health care, education, politics, sports, and many more.

Während in der Politik noch um eine Reform des Bundestagswahlrechts gerungen wird, hat die Mathematik auf eine zentrale Frage schon eine Antwort: Wie soll das Bundesgebiet neu in Wahlkreise eingeteilt werden? Das Gesetz sieht hier nur wenige Regeln vor, etwa wie viele Wahlkreise es je Bundesland geben muss – deutschlandweit zurzeit 299 – oder dass die Wahlkreise in Bezug auf die Bevölkerungszahl etwa gleich groß sein sollen (im Mittel umfasst ein Wahlkreis fast eine Viertelmillion Deutsche). Nach Möglichkeit sollen bei der Umrandung von Wahlkreisen bereits bestehende Verwaltungsgrenzen verwendet werden. Auch muss ein Wahlkreis ein zusammenhängendes Gebiet darstellen. Fast alle Reformvorschläge sehen eine Verringerung der Anzahl der Wahlkreise vor. Dann muss Deutschland neu eingeteilt werden. Was bedeutet das? Jede Gemeinde, jeder Stadtteil muss unter Einhaltung obiger Regeln mit anderen Gemeinden zusammengefasst werden. Es ist dabei überhaupt nicht klar, wo die neuen Grenzen verlaufen werden, denn es gibt sehr, sehr viele Möglichkeiten, die weit über zehntausend Gemeinden gesetzeskonform zu gruppieren. Dies ist ein typisches kombinatorisches Problem. Zielt man gemäß dem Prinzip „eine Person, eine Stimme“ darauf ab, die Bevölkerung möglichst ausgeglichen aufzuteilen, entsteht sogar ein kombi-

natorisches Optimierungsproblem: Bestimme unter allen erlaubten Einteilungen eine, bei der die Abweichung der Bevölkerungszahl je Wahlkreis von der Durchschnittsgröße am kleinsten ist. Als zweites, laut Bundeswahlleiter gleichberechtigtes, Ziel maximiert man die Verwendung bestehender Verwaltungsgrenzen. Bild 3 zeigt, wie deutlich die Wahlkreiseinteilung 2017 in Bezug auf diese beiden Ziele verbesserbar gewesen wäre. Die Technologie, mit der man solche Ergebnisse erzielen kann, heißt mathematische Optimierung. Sie erlaubt, den gesamten Entscheidungsspielraum zu erfassen und bezüglich einer Zielfunktion bestmögliche Lösungen zu berechnen. „Bestmöglich“ hat Bedeutungen wie am effizientesten, am schnellsten, am familienfreundlichsten. In solchen Lösungen werden sehr viele, voneinander abhängige Einzelentscheidungen simultan zu einem Gesamtkunstwerk zusammengefügt. Die Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten wächst exponentiell, man spricht von kombinatorischer Explosion. Zwei Aspekte spielen bei deren Beherrschung eine zentrale Rolle: Entscheidungsmodelle und Optimierungsalgorithmen. Ein Entscheidungsmodell fängt ausnahmslos alle Handlungsalternativen in einer Planungsaufgabe formal präzise ein. Es besteht aus Variablen, die die einzelnen Entscheidungsbestandteile widerspiegeln und somit eine

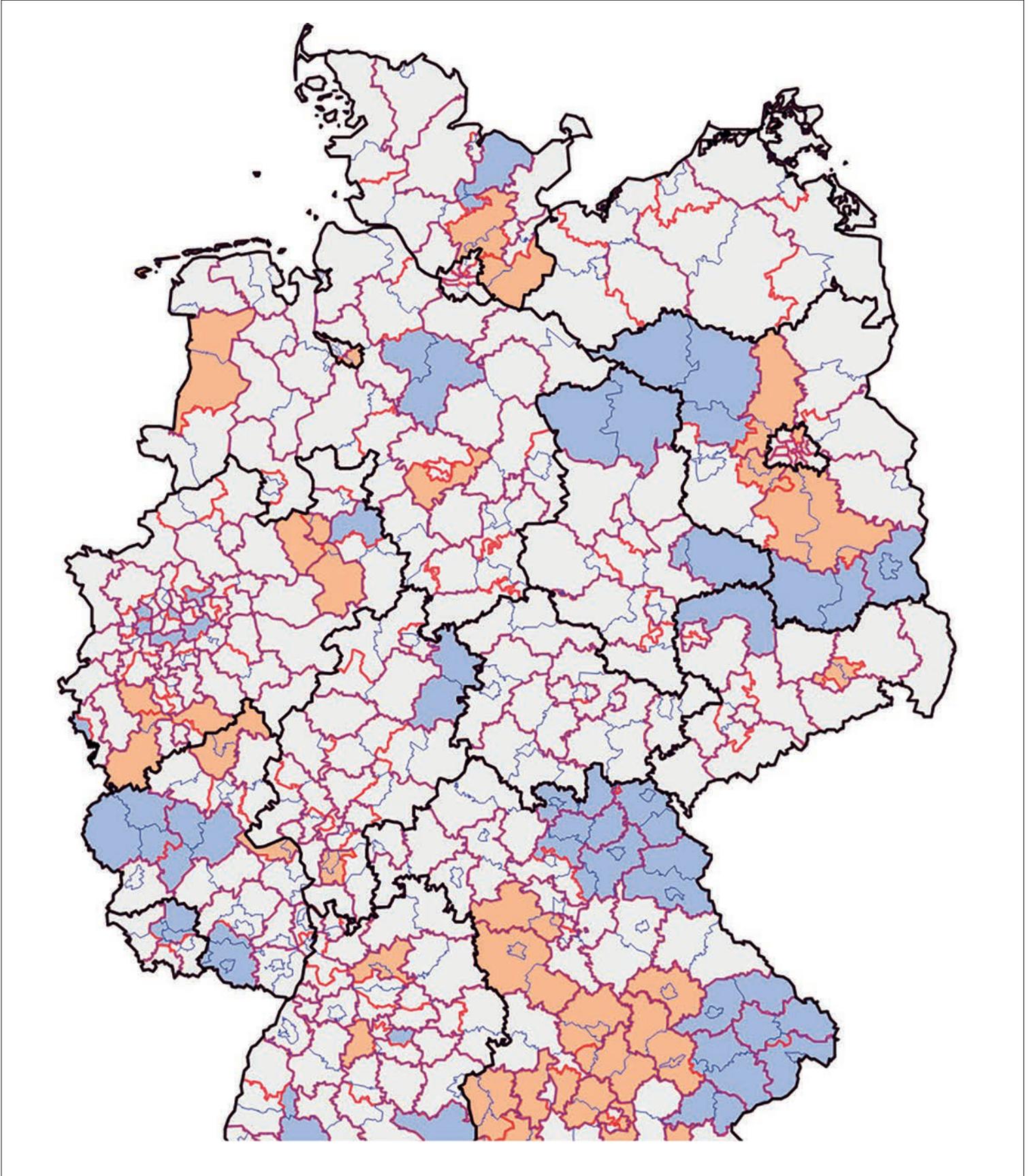


Bild 1: Einteilung des Bundesgebiets in Wahlkreise (Ausschnitt) zur Bundestagswahl 2017. Je eingefärbter ein Wahlkreis, desto größer ist die Abweichung der jeweiligen Bevölkerungszahl vom Durchschnitt. Rot sind Abweichungen nach oben, blau nach unten. In einer mathematisch optimierten Einteilung wären fast alle Wahlkreise ohne Einfärbung, die Wahlgleichheit also besser widerspiegelt.





Bild 2: Operations Research unterstützt komplexe Planungen und Entscheidungen, wie hier die bestmögliche Stapelung von Containern, mit Hilfe mathematischer Modelle und Algorithmen. Die Technologie ist so flexibel und ausgereift, dass sie in praktisch jeder Branche zum erfolgreichen Einsatz kommt.

Foto: Peter Winandy

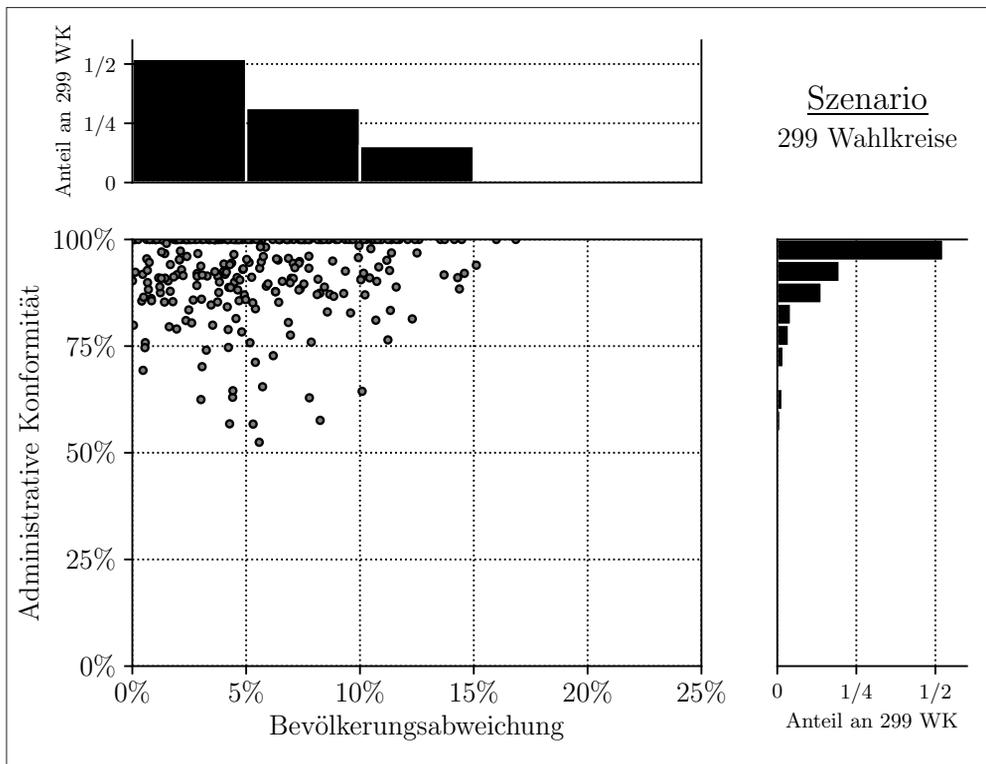
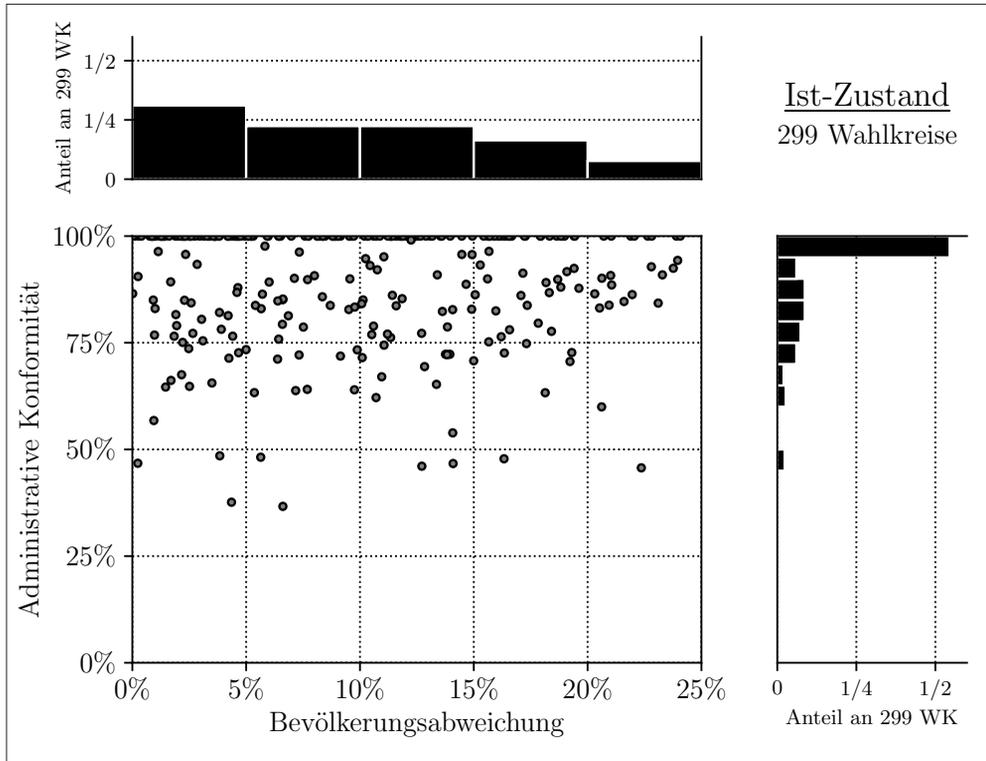


Bild 3: Auswertung der für die Bundestagswahl 2017 geltenden Einteilung in 299 Wahlkreise (oben) und einer mathematisch optimierten Einteilung (unten). Jeder Punkt entspricht einem Wahlkreis. Aufgetragen sind horizontal die Abweichungen vom Bevölkerungsdurchschnitt in Prozent (weiter links ist besser) und die Übereinstimmung der Wahlkreisgrenzen mit bestehenden Verwaltungsgrenzen in Prozent (weiter oben ist besser).

Lösung beschreiben, Restriktionen, die die Struktur einer Lösung vorgeben, und einer Zielfunktion, die die Qualität einer Lösung bewertet. Bei der Wahlkreiseinteilung gibt es je eine Variable für jede mögliche Zuordnung einer Gemeinde zu einem Wahlkreis. Diese kann nur zwei Werte annehmen, 0 oder 1, wobei 1 bedeutet, dass die Gemeinde dem Wahlkreis zugehört wird. Die Restriktionen erzwingen, dass jede Gemeinde genau einem Wahlkreis zugeordnet wird, dass die gesetzlichen Toleranzgrenzen der Bevölkerungsabweichung eingehalten werden, und dass die entstehenden Gebiete jeweils zusammenhängen. Alles dies lässt sich durch lineare Ungleichungen beschreiben. Die Zielfunktion misst zu gleichen Teilen die besagte Abweichung der Wahlkreisgrößen vom Durchschnitt und die Übereinstimmung der Wahlkreisgrenzen mit bestehenden Verwaltungsgrenzen. Es entsteht ein ganzzahliges Optimierungsmodell. Diese Modelle sind außergewöhnlich allgemein und flexibel und in beinahe allen kombinatorischen Optimierungssituationen anwendbar.

Zur Lösung der ganzzahligen Optimierungsmodelle gibt es einen sehr leistungsfähigen Algorithmus, genannt Branch-and-Cut, der für jedes derartige Modell funktioniert. Er berechnet nicht nur eine optimale Lösung, also eine bezüglich der Zielfunktionen bestmögliche Wahlkreiseinteilung, sondern liefert einen Beweis, dass es nicht besser geht. Bricht man den Algorithmus vorzeitig ab, erhält man neben einer Lösung immer auch eine Schranke, die angibt, wie weit die Lösung höchstens von einer Optimallösung entfernt ist. Diese Gütegarantien sind ein Alleinstellungsmerkmal der mathematischen Optimierung. Der Branch-and-Cut-Algorithmus ist im Laufe von Jahrzehnten immer weiter entwickelt worden. Theoretische Erkenntnisse aus der mathematischen Forschung, auch aus Aachen, bilden hier die Grundlage. Der Algorithmus enumeriert nicht alle möglichen Lösungen durch, das würde viele Jahrhunderte dauern, sondern kann geschickt ganze Klassen von Lösungen als nicht optimal ausschließen. Dadurch ist er in der Praxis effizient. Tatsächlich haben algorithmische Verbesserungen in den letzten 25 Jahren eine Beschleunigung um einen Faktor von gut 2.000.000 bewirkt. Hinzu kommt in diesem Zeitraum die Beschleunigung handelsüblicher PCs um einen weiteren Faktor von etwa 2.000. Plakatativ bedeutet dies, dass eine Optimierungsrechnung, die vor 25 Jahren noch ein Menschenleben lang gedauert hätte, heute in einer Sekun-

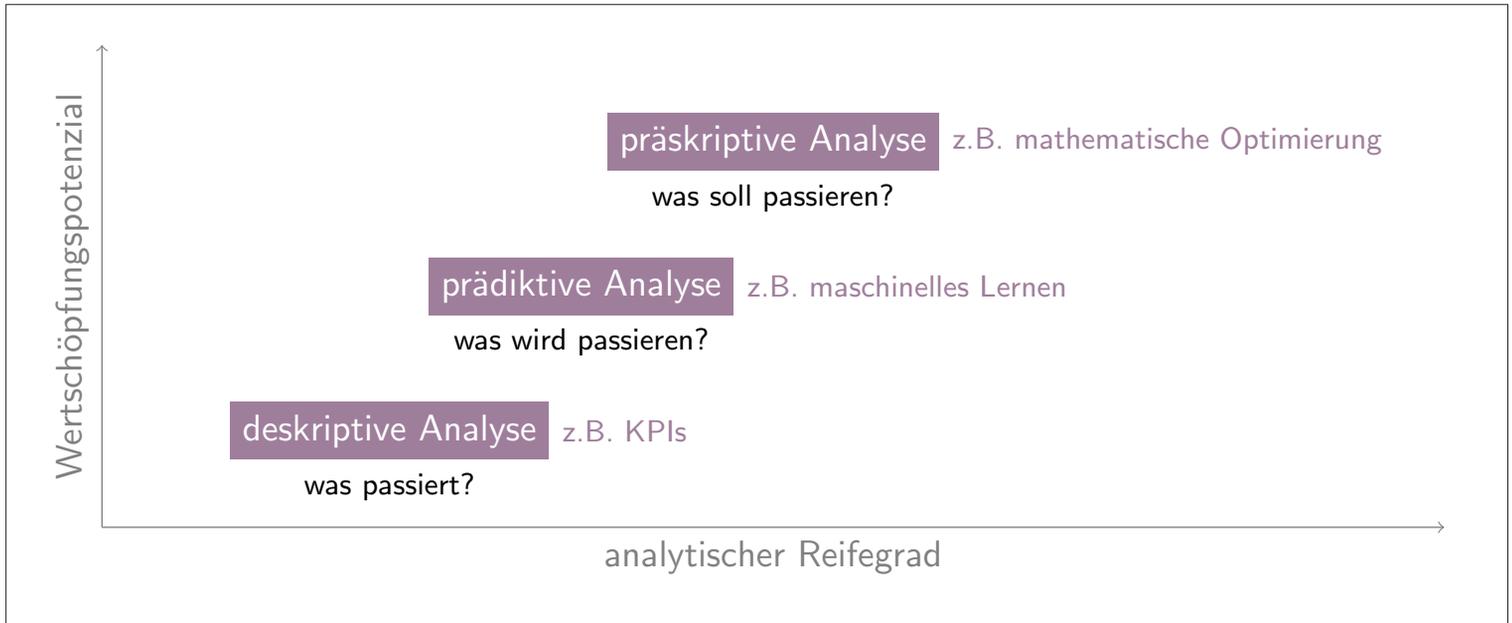


Bild 4: Arten der Datenanalyse. Mit wachsendem analytischem Reifegrad wächst in Unternehmen das Potenzial für Wertschöpfungen aus Daten. Dieser Artikel behandelt die dritte Stufe, die präskriptive Analyse.

de optimal lösbar ist. Diese Technologie in kombinatorischen Entscheidungssituationen also nicht auszuprobieren ist daher schwer begründbar. Und erweisen sich Rechenzeiten doch als inakzeptabel lang, hilft die Theorie durch Umformulierungen der Modelle und Spezialisierungen der Algorithmen.

Die Vorteile einer mathematisch erzeugten Wahlkreiseinteilung liegen auf der Hand: Ausschließlich die gesetzlichen Vorgaben finden Anwendung, nur die angegebenen Ziele werden verfolgt. Wenn man von der Korrektheit der Modellierung und der Algorithmen überzeugt ist, und das dürfen wir hier unterstellen, schafft dieses Vorgehen große Transparenz. Die Flexibilität der Modelle erlaubt es, weitere Nebenbedingungen schnell einzuarbeiten. Verändert sich die Datengrundlage, und das tut sie durch demographische Entwicklung ständig, rechnet man einfach neu. Die Abstraktheit der Mathematik erweist sich als weitere Stärke. Kann man Wahlkreise optimal einteilen, so kann man das auch mit anderen Gebieten, etwa Tarifzonen, Briefzustellbezirken oder Vertriebsbereichen.

In der Wertschöpfungskette von Daten kennt man mindestens drei Reifestufen der Analyse, siehe Bild 4. Die deskriptive Analyse spiegelt den Status quo wider: Was passiert gerade? Der Bereich des maschinellen Lernens mit seiner Muster- und Anomalieerkennung fällt vor allem in die prädiktive Analyse: Was passiert, wenn sich die Trends in den Daten fortsetzen? Eine konkrete Handlungsempfehlung findet erst auf der dritten Stufe statt, der präskriptiven Analyse: Was soll passieren, um

auf Basis der Daten bestmögliche Ergebnisse zu erzielen? Diese Königsdisziplin der Entscheidungen ist die Domäne des Operations Research. Am Lehrstuhl für Operations Research werden Entscheidungen in Produktion, Logistik, Mobilität, Bildung, Gesundheit, Energie, Politik und Sport unterstützt. Der internationale Stand in Forschung und Entwicklung von allgemeinen Optimierungsalgorithmen für extrem große Entscheidungsmodelle wird hier maßgeblich getrieben. Zwei Beispiele sollen die Vielfalt verdeutlichen. Der universitätsweite Stundenplan der RWTH wird jedes Semester mit Hilfe der mathematischen Optimierung geplant. Jede regelmäßige Veranstaltung benötigt einen Raum und eine wöchentliche Zeit. Die Verzahntheit interdisziplinärer Studiengänge, unterschiedliche Anforderungen der Fakultäten und Fachgruppen und eingeschränkte Verfügbarkeiten der Dozierenden sind große Herausforderungen. Das Veranstaltungsangebot ist so reichhaltig, dass Überschneidungen etwa in Wahlpflichtbereichen unvermeidbar sind, wohl aber mit mathematischer Optimierung minimiert werden können. Ganz nebenbei lassen sich so Szenarien durchspielen wie die Renovierung zentraler Hörsaalgebäude oder die Einführung neuer Studiengänge. Das Projekt „carpe diem!“ hat Vorbildcharakter für andere Universitäten.

Ein aktuelles Forschungsprojekt befasst sich mit dem Lastmanagement energieintensiver Industrien. Insbesondere der wachsende Anteil erneuerbarer Energien am Strommix verursacht größere Schwankungen im An-

gebot, die auch auf der Nachfrageseite ausgeglichen werden können. So kann man die Produktion in Zeiten größeren Stromangebots verlegen und in Zeiten der Knappheit zurückfahren. Für Unternehmen stellt sich die Frage, ob sich diese Flexibilität rechnet. Tatsächlich handelt es sich auch hier um ein kombinatorisches Optimierungsproblem, bei dem die Produktion auf Basis tatsächlicher und prognostizierter Strompreise viertelstundengenau gesteuert wird. Das Projekt wird gemeinsam mit dem E.ON Energy Research Center der RWTH und dem Spin-off gapzero mathematical decision support durchgeführt.

Autor

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. habil. Marco Lübbecke ist Inhaber des Lehrstuhls für Operations Research.