Technische Universität Darmstadt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

Bachelorarbeit

im Studiengang Mathematik BSc.

Atomic routing games on maximum congestion
-
Routingspiele zur Minimierung von Staus

eingereicht von: Ann-Kathrin Heyse

eingereicht am: 01. September 2010

Betreuer: Dr. habil. Marco Lübbecke

zweiter Gutachter: Prof. Dr. Stefan Ulbrich

Ehrenwörtliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit ohne Hilfe Dritter und nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt habe. Ich habe alle Stellen, die ich aus den Quellen wörtlich oder inhaltlich entnommen habe, als solche kenntlich gemacht. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Sulzbach, den 31.08.2010

Ann-Kathrin Heyse

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit dem Artikel „Atomic routing games on maximum congestion“ von Costas Busch und Malik Magdon-Ismail, erschienen in „Theoretical Computer Science“ am 31. August 2009.
In dem Artikel geht es vorrangig um spieltheoretische Überlegungen in (Straßen-) Netzwerken, in denen Spieler unabhängig voneinander versuchen, einen für sie optimalen Weg zu ihrem Ziel zu finden. Optimal bedeutet hierbei, dass das Verkehrsaufkommen (im Folgenden werden wir von „Kosten“ sprechen) entlang eines gewählten Pfades möglichst gering sein soll. Dazu sollte man sich klarmachen, dass es viele verschiedene Modelle von Verkehrsnetzen gibt, und dadurch natürlich auch verschiedene Auffassungen der Kosten. Die meisten Autoren ähnlicher Artikel [1,2,3] betrachten beispielsweise die Kosten eines Pfades als die Summe der Kosten entlang seiner Kanten. Angewandt auf Verkehrsnetzwerke bedeutet dies, dass die Güte eines gewählten Pfades anhand der Anzahl der anderen Verkehrsteilnehmer auf dem Pfad bewertet wird.
Eine weitere Überlegung ist es, nur die Kante mit der höchsten Auslastung als Gütekriterium heranzuziehen. Die Kosten des Pfades entsprechen dann genau den Kosten dieser Kante.
Unter der Annahme, dass alle Verkehrsteilnehmer mit nahezu konstanter Geschwindigkeit fahren, wird nur auf stark befahrenen Straßen (Kanten) mit Behinderungen zu rechnen sein. Auf weniger stark ausgelasteten Strecken ist die Anzahl der konkurrierenden Verkehrsteilnehmer unerheblich, da keine gegenseitige Behinderung stattfinden wird. Insofern ist es also sinnvoll, nur die maximal auftretende Auslastung entlang eines Pfades zu betrachten. Von dieser Vorstellung gehen auch die beiden Autoren des hier behandelten Artikels aus. Außerdem nehmen sie in ihrem Modell an, dass das Verkehrsnetz einen ungerichteten, zusammenhängenden Graphen darstellt, und dass der Fluss durch das Netz nicht teilbar ist, da die Spieler nur entlang eines gewählten Pfades fahren und ihren Weg nicht auf mehrere Pfade aufteilen können.

Das Augenmerk der Autoren liegt auf dem Beweis der Existenz eines Nash-Gleichgewichts (Theorem 1.1), das mit der optimalen Lösung für alle Spieler übereinstimmt, sowie der Herleitung einer Abschätzung für den Price of Anarchy - dem „Verhältnis zwischen der für die Allgemeinheit ungünstigsten stabilen dezentralen Lösung und dem sozialen Optimum”[4] (Theorem 1.2). Dies ist insbesondere wichtig, um Voraussagen über das Verkehrsaufkommen und das Verhalten der beteiligten Personen treffen zu können. Bevor wir nun zum eigentlichen Thema übergehen, sollen hier noch einige Begriffe aus der Spieltheorie erklärt werden.

2 Grundlagen aus der Spieltheorie

Die Spieltheorie befasst sich mit dem Verhalten von Spielern in einem Spiel, wobei man folgende Annahmen voraussetzt (vgl. [8]):

a) Das Gesamtergebnis hängt von den Entscheidungen aller Spieler ab; ein Spieler kann das Ergebnis also nicht unabhängig von den anderen Spielern beeinflussen.

b) Jeder Spieler ist sich dessen bewusst.

c) Jeder Spieler geht davon aus, dass auch alle anderen sich dessen bewusst sind.

d) Jeder berücksichtigt bei seinen Entscheidungen die Voraussetzungen a) bis c).

Die Grundlage der modernen Spieltheorie wurde im Jahr 1928 von John von Neumann mit der Untersuchung von Gesellschaftsspielen gelegt. Schon wenige Jahre darauf nutzten Mathematiker wie Oskar Morgenstern oder John Nash, auf den das gleich näher erläuterte Nash-Gleichgewicht zurückgeht, die Methoden der Spieltheorie für die Beschreibung wirtschaftlicher Prozesse, wodurch sie große Bedeutung in der heutigen Wirtschaftstheorie erlangte.

2.1 Nash-Gleichgewichte

Unter einem Nash-Gleichgewicht versteht man einen stabilen Zustand in einem nicht-kooperativen System, in dem die alleinige Abweichung eines Spielers von seiner Strategie keine Verbesserung seines Ergebnisses herbeiführen kann. Nicht-kooperativ bedeutet in diesem Zusammenhang, dass sich die Spieler untereinander nicht absprechen können.

2.2 Der Price of Anarchy (PoA)

Erstmals verwendet wurde dieser Begriff von Elias Koutsoupias und Christos Papadimitriou in „Worst-case Equilibria“ [9]. Wie bereits in der Einleitung kurz erwähnt, ist der Price of Anarchy ein Maß für das Verhältnis zwischen dem ungünstigsten Nash-Gleichgewicht und der optimalen Lösung für alle Spieler. Je kleiner dieser Wert ist, desto näher wird ein sich einstellendes Gleichgewicht der optimalen Lösung für alle kommen.

2.3 Der Price of Stability (PoS)

Im Unterschied zum PoA gibt der PoS das Verhältnis zwischen dem günstigsten Nash-Gleichgewicht und der optimalen Lösung für alle Spieler an. Gilt PoS=1, so stimmt die optimale Lösung mit dem günstigsten Nash-Gleichgewicht überein. Dass dies auch für unser untersuchtes Netzwerk gilt, werden wir im weiteren Verlauf zeigen.

3 Beispiel: Gefangenendilemma

Die praktische Bedeutung der oben genannten Begriffe kann man sich anhand des sogenannten Gefangenendilemmas klarmachen. Dabei geht es um zwei Gefangene, denen folgende Optionen offenstehen: Sind beide geständig, so kommen sie strafmildernd mit jeweils 4 Jahren Haft davon. Gesteht nur einer der beiden die Tat, so wird der Geständige mit nur 1 Jahr und der andere mit 8 Jahren bestraft. Schweigen beide, so werden sie nur zu jeweils 2 Jahren hinter Gittern gebracht. Am besten wegkommen würden sie natürlich, wenn sie beide schweigen. Allerdings dürfen sie sich nicht absprechen und so besteht für jeden die Gefahr, dass der andere die Tat gesteht und er selbst für 8 Jahre ins Gefängnis kommt. Es bleibt beiden also nichts anderes übrig, als über das Verhalten des anderen zu spekulieren und aufgrund dessen eine Entscheidung zu treffen. Die möglichen Ausgänge des Gefangenendilemmas sind in folgender Tabelle aufgelistet:

	B gesteht	B gesteht nicht
A gesteht	(4,4)	(1,8)
A gesteht nicht	(8,1)	(2,2)

Das einzige Nash-Gleichgewicht ist in diesem Fall die Kombination „A und B gestehen“, da keiner der beiden unabhängig vom anderen seine Lage durch Ändern seiner Strategie verbessern kann. Allerdings ist dieses Gleichgewicht nicht die beste Lösung für beide; Nash-Gleichgewichte sind also nicht immer optimal. Betrachtet man als Bewertungskriterium die Summe der Haftstrafen, so ergibt sich der Price of Anarchy zu:

$$\frac{\text{Summe der Haftstrafen im schlechtesten Nash-Gleichgewicht}}{\text{Summe der Haftstrafen im Idealfall}} = \frac{8}{4} = 2$$

Anschaulich bedeutet das: Wenn sich die Gefangenen absprechen könnten, kämen sie dabei doppelt so gut weg. Sie müssten also nur die Hälfte der Zeit im Gefängnis verbringen.

4 Definitionen

Eine Instanz R eines Routing-Spiels ist ein Tupel $(\mathbf{N}, G, \{P_i\}_{i \in \mathbf{N}})$ mit:

- **N**={1, 2,...,N} ist die Menge der Spieler
- $G = (V, E)$ ist ein ungerichteter Graph mit n Ecken
- P_i ist die Menge aller Pfade für Spieler i, wobei Kanten nur einmal, Knoten jedoch mehrfach enthalten sein dürfen. Jeder Pfad in P_i ist ein Pfad in G mit demselben Ausgangsknoten $s_i \in V$ und Zielknoten $t_i \in V$.

Jeder Pfad $p_i \in P_i$ ist eine **reine Strategie** für Spieler i. Ein **reines Strategieprofil** bzw. **Routing** $\mathbf{p} = [p_1, p_2, ..., p_N]$ stellt eine Kombination von reinen Strategien dar, wobei für jeden Spieler genau eine reine Strategie enthalten ist.
Für jedes Routing **p** und jede Kante $e \in E$ bezeichnet die **Kanten-Last** C_e die Anzahl der Pfade in **p**, die die Kante e nutzen. In einem Verkehrsnetz entspricht dies der Anzahl der Verkehrsteilnehmer, die entlang der Kante e fahren.
Wie bereits in der Einleitung erwähnt, definieren wir für jeden Pfad p die **Pfad-Last** C_p als das Maximum aller Kanten-Lasten über alle Kanten in p, d.h. $C_p = \max_{e \in p} C_e$.
Die **Netzwerk-Last** C mit $C = \max_{e \in E} C_e$ ist die maximale Kanten-Last über alle Kanten in E. Sie gibt das höchste Verkehrsaufkommen des Netzwerkes an und wird als Maß für die **sozialen Kosten** herangezogen. Die **privaten Kosten** (C_{p_i}) dagegen geben an, wie groß die größte Pfad-Last für jeden einzelnen Spieler i ist, d.h. mit wie viel Verkehr er maximal auf einer Kante seines gewählten Pfades zu rechnen hat.
Spieler i ist **lokal optimal** im Routing **p**, falls jeder andere Pfad $p'_i \in P_i$ zu höheren privaten Kosten führen würde, d.h. $C_{p_i} \leq C_{p'_i}$, wobei p_i im Routing **p** durch p'_i ersetzt wird.
Ein Routing **p** wird **Nash-Gleichgewicht** oder **Nash-Routing** genannt, falls jeder Spieler lokal optimal ist.
Ein Routing **p*** ist optimal, falls es minimale soziale Kosten hat.
Die Qualität der verschiedenen Nash-Routings wird anhand des Price of Stability (PoS) bzw. Price of Anarchy (PoA) gemessen. Bezeichne **T** die Menge der verschiedenen Nash-Routings und C^* die sozialen Kosten eines optimalen Routings **p***, dann ist

$$\text{PoS} = \inf_{\mathbf{p} \in \mathbf{T}} \frac{C}{C^*} \quad \text{und} \quad \text{PoA} = \sup_{\mathbf{p} \in \mathbf{T}} \frac{C}{C^*}.$$

5 Existenz von optimalen Nash-Routings

Theorem 1.1 *Für jedes Routing-Spiel gilt:*

(i) *Es gibt ein reines Nash-Routing, das optimal ist, d.h. PoS = 1.*
(ii) *Jedes Routing* $\mathbf{p}$ *konvergiert in endlicher Zeit gegen ein Nash-Routing.*

Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis von Theorem 1.1. Dazu definieren wir einen Kostenvektor $C(\mathbf{p}) = [m_0(\mathbf{p}), m_1(\mathbf{p}), ...]$, wobei die Komponente $m_k(\mathbf{p})$ für die Anzahl der Kanten mit Last k steht. Damit lassen sich die sozialen Kosten SC ausdrücken als $SC = \max\{k | m_k > 0\}$.
Außerdem definieren wir eine lexikographische Sortierung wie folgt: Seien $\mathbf{p}$, $\mathbf{p'}$ zwei Routings mit $C(\mathbf{p}) = [m_0(\mathbf{p}), m_1(\mathbf{p}), ...]$ und $C(\mathbf{p'}) = [m'_0(\mathbf{p}), m'_1(\mathbf{p}), ...]$. Zwei Routings sind genau dann gleich ($\mathbf{p} =_c \mathbf{p'}$), wenn $m_k = m'_k$ für alle $k \geq 0$; es gilt $\mathbf{p} <_c \mathbf{p'}$ genau dann, wenn ein k^* existiert mit $m_{k^*} < m'_{k^*}$ und $m_k = m'_k$ für alle $k > k^*$.

Bemerkung 5.1 *Jedes minimale Routing ist optimal.*

Beweis. Sei $(\mathbf{N}, G, \{P_i\}_{i \in \mathbf{N}})$ eine Routing-Instanz. Da es nur endlich viele Routings gibt (jede Kante kann maximal einmal in einem Spieler-Pfad enthalten sein!), existiert mindestens ein minimales Routing $\mathbf{p^*}$ mit $\mathbf{p^*} \leq_c \mathbf{p}$ für alle anderen Routings $\mathbf{p}$.
Angenommen, es gelte $SC(\mathbf{p}) < SC(\mathbf{p^*})$ für ein anderes Routing $\mathbf{p}$ (d.h. die sozialen Kosten für dieses Routing sind geringer), dann wäre der maximale Index k mit $m_k(p) > 0$ kleiner als der zu $\mathbf{p^*}$ gehörende Index k^*. Dies steht aber im Widerspruch zu unserer Annahme $\mathbf{p^*} \leq_c \mathbf{p}$. Also muss ein minimales Routing optimal sein. $\square$

Definition. Ein **verbessernder Zug** ist für Spieler i möglich, wenn er durch Ersetzen seines Pfades p_i durch einen neuen Pfad p'_i zu einer geringeren Pfad-Last gelangt (geringere private Kosten!).
Das gesamte Routing $\mathbf{p} = [p_1, p_2, ..., p_i, ..., p_N]$ ergibt sich nach der Pfadänderung von Spieler i zu $\mathbf{p'} = [p_1, p_2, ..., p'_i, ..., p_N]$.

Lemma 5.2 *Falls ein verbessernder Zug eines Spielers* i *ein Routing* $\mathbf{p}$ *in ein neues Routing* $\mathbf{p'}$ *überführt, so gilt* $\mathbf{p'} <_c \mathbf{p}$*.*

Beweis. Angenommen, ein Spieler i ändert ein Routing $\mathbf{p}$ in $\mathbf{p'}$ durch einen verbessernden Zug. Dann gilt für dessen private Kosten $C_{p'_i}(\mathbf{p'}) < C_{p_i}(\mathbf{p})$. Sei $k = C_{p_i}$. Da Spieler i seinen Pfad geändert und seine privaten Kosten damit auf einen Wert kleiner als k gesenkt hat, muss die Anzahl der Kanten mit Last k in Routing $\mathbf{p'}$ um 1 kleiner sein als in Routing $\mathbf{p}$, d.h. $m_k(\mathbf{p'}) \leq m_k(\mathbf{p}) - 1$. Da Kanten mit Last größer als k durch die Pfadänderung nicht beeinflusst wurden, gilt $m_j(\mathbf{p'}) = m_j(\mathbf{p})$ für alle $j > k$.
Insgesamt haben wir damit $m_k(\mathbf{p'}) < m_k(\mathbf{p})$ und $m_j(\mathbf{p'}) = m_j(\mathbf{p})$ für alle $j > k$, was unsere Behauptung $\mathbf{p'} <_c \mathbf{p}$ impliziert. $\square$

Lemma 5.3 *Jedes minimale Routing ist ein optimales Nash-Routing ($PoS = 1$).*

Beweis. Jeder verbessernde Zug eines Spielers führt immer zu einer Abnahme der Kanten mit hoher Auslastung, da der Spieler sich einen Pfad mit weniger Auslastung sucht und so die Last Stück für Stück „gleichmäßig" auf das gesamte Netz verteilt wird. Es gibt nur eine begrenzte Anzahl an verschiedenen Routings, damit ist jede Verbesserungsdynamik endlich. Da kein Spieler in einem minimalen Routing einen verbessernden Zug machen kann, muss jedes minimale Routing ein Nash-Routing sein. Da außerdem nach Bemerkung 5.1 jedes minimale Routing auch optimal ist, folgt die Behauptung.
Theorem 1.1 folgt nun aus Lemma 5.2 und 5.3. □

6 Der Price of Anarchy in Abhängigkeit von der Pfadlänge

Theorem 1.2 *Für jedes Routingspiel, bei dem die Strategieprofile der Spieler aus Pfaden mit höchstens Länge l bestehen, gilt $PoA < 2(l + \log n)$, wobei n für die Anzahl der Knoten des Netzwerks steht.*

Bemerkung. *Wir verwenden im gesamten Artikel* $\log$ *als vereinfachende Schreibweise für den Zweierlogarithmus* $\log_2$.

Zum Beweis des Theorems werden wir den Begriff des **Kantenerweiterungs-Prozesses** benötigen, sowie folgende Definitionen:
Sei $R = (\mathbf{N}, G, \{P_i\}_{i\in\mathbf{N}})$ eine Routinginstanz. Sei $P = \bigcup_{i\in\mathbf{N}} P_i$ die Menge aller Pfade aller Spieler. Die **Pfadlänge** l von R ist definiert als $l = \max_{p\in P} |p|$. Ein **Pfad-Schnitt** für Spieler i ist eine Menge E_i von Kanten, sodass jeder Pfad im Strategieprofil P_i mindestens eine Kante in E_i enthält. Die Last eines Pfad-Schnitts ($W(E_i)$) ist definiert als die minimale Last über alle Kanten in E_i, $W(E_i) = \min_{e\in E_i} C_e$.

Lemma 6.1 *Sei $\boldsymbol{p} = [p_1, p_2, ..., p_N]$ ein Routing, in dem Spieler i lokal optimal ist. Dann gibt es einen Pfad-Schnitt E_i für Spieler i mit Last $W(E_i) \geq C_{p_i} - 1$.*

Beweis. Da Spieler i lokal optimal ist, muss jeder Pfad im Strategieprofil P_i mindestens eine Last von $C_{P_i} - 1$ haben. Denn angenommen, es gäbe einen Pfad p_i' in P_i mit Last kleiner oder gleich $C_{P_i} - 2$, dann könnte Spieler i von p_i nach p_i' wechseln und damit seine Kosten auf höchstens $C_{P_i} - 1$ reduzieren, was aber der lokalen Optimalität von Pfad p_i widerspricht.
Sei $e(p) \in p$ für jeden Pfad $p \in P_i$ die Kante mit der höchsten Auslastung, wobei nach dem eben Erwähnten $C(e) \geq C_{p_i} - 1$ gelten muss. Sei $E_i = \bigcup_{p\in P_i} e(p)$. Da E_i mindestens eine Kante von jedem Pfad in P_i enthält, ist E_i ein Pfad-Schnitt für Spieler i. Außerdem hat jede Kante in E_i mindestens Last $C_{P_i} - 1$. Wir haben also einen Pfad-Schnitt gefunden, der $W(E_i) \geq C_{p_i} - 1$ erfüllt, womit die Behauptung bewiesen ist. □

6.1 Kantenerweiterungs-Prozess

Nehmen wir an, die Netzwerklast in einem Routing $\mathbf{p}$ sei C und mindestens ein Spieler sei lokal optimal mit Kosten von ebenfalls Größe C. Wir definieren $\mathcal{E}_0$ als die Menge aller Kanten mit Last $C_0 = C$, die von mindestens einem lokal optimalen Spieler benutzt werden, und Π_0 als die Menge dieser lokal optimalen Spieler, die mindestens eine Kante in $\mathcal{E}_0$ nutzen.
Nach Lemma 6.1 besitzt jeder Spieler in Π_0 einen Pfad-Schnitt mit Last größer oder gleich $C_0 - 1$. Sei nun $\mathcal{E}_1$ die Vereinigung von $\mathcal{E}_0$ mit all diesen Pfad-Schnitten von Spielern aus Π_0. Dann hat jede Kante in $\mathcal{E}_1$ per Konstruktion eine Last von mindestens $C_1 = C_0 - 1$. Ebenso erhalten wir die Menge Π_1 als die Menge aller lokal optimalen Spieler, die mindestens eine Kante in $\mathcal{E}_1$ nutzen. Jeder Spieler in Π_1 hat dann Kosten von mindestens C_1, da dasselbe für jede Kante aus $\mathcal{E}_1$ gilt.
Durch diesen Prozess ergibt sich folgende Rekursionvorschrift: $\mathcal{E}_i$ ergibt sich als Vereinigung von $\mathcal{E}_{i-1}$ und den Pfad-Schnitten der Spieler aus Π_{i-1}. Die Last jeder Kante in $\mathcal{E}_i$ beträgt dann mindestens $C_i = C_{i-1} - 1 = C - i$. Auf diese Weise erhalten wir eine aufsteigende Kette von Kantenmengen $\mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2 \subseteq ...$ mit $W(\mathcal{E}_j) \geq C_j = C - j$ und dazugehörend die entsprechenden Spielermengen $\Pi_0 \subseteq \Pi_1 \subseteq \Pi_2 \subseteq ....$
Der Prozess wird so lange fortgeführt, bis eine Kantenmenge $\mathcal{E}_s$ erreicht ist, für die $|\mathcal{E}_s| \leq 2\,|\mathcal{E}_{s-1}|$ gilt.

Lemma 6.2 *Es gilt* $|\mathcal{E}_s| \geq 2^{s-1}$ *und* $1 \leq s < 2 \log n$ *mit* $n =$*Anzahl der Knoten.*

Beweis. Es gilt zum Einen $|\mathcal{E}_s| \leq \frac{1}{2}n^2$, da es insgesamt maximal n^2 Kanten geben kann, von denen höchstens die Hälfte nach Konstruktionsvorschrift in $\mathcal{E}_s$ enthalten ist.
Zum Anderen wird eine Kantenmenge $\mathcal{E}_j$ bei jeder Erweiterung mindestens verdoppelt (ansonsten müsste wegen des Abbruchkriteriums $|\mathcal{E}_j| \leq 2\,|\mathcal{E}_{j-1}|$ schon bei einem kleineren Index als s abgebrochen werden).
Für $s = 1$ ist nichts zu zeigen, sei also $s > 1$.
Wegen $|\mathcal{E}_k| > 2\,|\mathcal{E}_{k-1}|$ für $k = 1, ..., s-1$ folgt $|\mathcal{E}_k| > 2^k\,|\mathcal{E}_0| \geq 2^k$ (da $|\mathcal{E}_0| \geq 1$).
Aus $\mathcal{E}_{s-1} \subseteq \mathcal{E}_s$ folgt damit die erste Ungleichung: $|\mathcal{E}_s| \geq |\mathcal{E}_{s-1}| > 2^{s-1}$.
Die zweite Ungleichung ergibt sich durch Logarithmieren von $2^{s-1} < |\mathcal{E}_s| \leq \frac{1}{2}n^2$, $\Rightarrow 1 \leq s < \log n$. $\square$

Sei mit $F(C') \subseteq \mathbf{N}$ die Menge der in einem Routing $\mathbf{p}$ nicht lokal optimalen Spieler mit Kosten von mindestens C' bezeichnet.
Mit dieser Definition werden wir im Folgenden eine Beziehung zwischen den Kosten eines Nash-Routings und des optimalen Routings herleiten.

Lemma 6.3 $C < 2l \cdot (C^* + |F(C - 2\log n)|) + 2\log n$.

Beweis. Sei M die Anzahl der Male, bei denen die Kanten aus $\mathcal{E}_{s-1}$ von Pfaden aus dem Routing $\mathbf{p}$ benutzt werden. Da jede Kante in $\mathcal{E}_{s-1}$ nach Konstruktion mindestens Last C_{s-1} hat, folgt

$$(1)\ M > C_{s-1} \cdot |\mathcal{E}_{s-1}|.$$

Die Kanten in $\mathcal{E}_{s-1}$ werden von lokal optimalen Spielern (Π_{s-1}), sowie von nicht lokal optimalen Spielern in einer Menge $B \subseteq F(C_{s-1})$ benutzt. Für die Anzahl $|A|$ aller Spieler, die zur Kantenlast in $\mathcal{E}_{s-1}$ beitragen, gilt also:

$$(2)\ |A| \leq |\Pi_{s-1}| + |F(C_{s-1})|.$$

Da die Länge der einzelnen Pfade höchstens l ist, kann jeder Spieler in $A \subseteq \Pi_{s-1} \bigcup F(C_{s-1})$ auch nur höchstens l Kanten in $\mathcal{E}_{s-1}$ nutzen. Zusammen mit (1) ergibt das

$$(3)\ C_{s-1} \cdot |\mathcal{E}_{s-1}| < M \leq l \cdot |A|$$

und unter Berücksichtigung von (2) folgt

$$\begin{aligned} &(4)\ C_{s-1} \cdot |\mathcal{E}_{s-1}| < M \leq l \cdot (|\Pi_{s-1}| + |F(C_{s-1})|) \\ \Leftrightarrow \quad & \mathrm{C}_{s-1} < \tfrac{l}{|\mathcal{E}_{s-1}|} \cdot (|\Pi_{s-1}| + |F(C_{s-1})|). \end{aligned}$$

$\mathcal{E}_s$ enthält nach Konstruktion für jeden Spieler in Π_{s-1} einen Pfadschnitt und alle diese Spieler nutzen mindestens eine Kante von $\mathcal{E}_s$ in jedem Routing, inklusive des optimalen Routings $\mathbf{p*}$.
Jede Kante in $\mathcal{E}_s$ wird damit mindestens $|\Pi_{s-1}|$-mal genutzt.
Aus dem Schubfachprinzip[1] folgt, dass es mindestens eine Kante gibt, die mindestens $|\Pi_{s-1}| \,/\, |\mathcal{E}_s|$ mal genutzt wird. Auf diese Weise erhalten wir die Abschätzung $C^* \geq |\Pi_{s-1}| \,/\, |\mathcal{E}_s|$, die sich wegen $|\mathcal{E}_s| \leq 2\,|\mathcal{E}_{s-1}|$ zu $|\Pi_{s-1}| \leq 2\,|\mathcal{E}_{s-1}|\, C^*$ ergibt.
Setzen wir dieses Ergebnis in (4) ein, so erhalten wir:

$$(5)\ C_{s-1} < 2l \cdot \left(C^* + \tfrac{|F(C_{s-1})|}{2|\mathcal{E}_{s-1}|}\right).$$

Wir nutzen nun die Gleichheit $C_{s-1} = C-(s-1)$ und die Abschätzung $2\,|\mathcal{E}_{s-1}| \geq 2^s$ aus Lemma 6.2 und bringen (5) in die Form

$$(6)\ C < 2l \cdot \left(C^* + \tfrac{|F(C-s+1)|}{2^s}\right) + s - 1.$$

Da $|F(C)|$ monoton fallend in C ist (beachte die Definition von $F(C)$!) und $s < 2\log n$ nach Lemma 6.2 gilt, ist $|F(C - s + 1)| \leq |F(C - 2\log n)|$. Damit erhalten wir unsere Behauptung:

$$C < 2l \cdot (C^* + |F(C - 2\log n)|) + 2\log n. \quad \square$$

[1] Verteilt man n Objekte auf k Mengen ($n, k > 0$) und ist dabei $n > k$, so gibt es mindestens eine Menge, in der sich mindestens $\frac{n}{k}$ Objekte befinden. (vgl. [12])

In einem optimalen Nash-Routing gilt $|F(C)| = 0$, da jeder Spieler lokal optimal ist. In diesem Fall ergibt sich mittels Teilen durch C^*:

$$\frac{C}{C^*} < 2l + \frac{2\log n}{C^*} \leq 2l + 2\log n.$$

Da die Ungleichung für alle C gilt, erhalten wir mit der Definition des Price of Anarchy ($PoA = \sup\limits_{\mathbf{p}\in\mathbf{T}} \frac{C}{C^*}$):

$$PoA \leq 2l + 2\log n,$$

womit wir Theorem 1.2 bewiesen haben. $\square$

7 Der Price of Anarchy und Zyklen im Netzwerk

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit einer Charakterisierung des Price of Anarchy in Bezug auf den längsten Zyklus des Netzwerks (Im Gegensatz zu einem Kreis darf ein Zyklus Knoten mehrfach durchlaufen!). Dazu sei für einen Graphen G die **Zyklenzahl** κ_e definiert als die Länge des längsten Zyklus mit einfachen Kanten in G.

Satz von Menger. Ein Graph $G = (V, E)$ ist genau dann **k-fach kantenzusammenhängend**, falls es zwischen je zwei Knoten $v_1 \neq v_2 \in V$ mindestens k kantendisjunkte Wege gibt. (vgl. [13])

Theorem 1.3 *Für jeden ungerichteten Graphen G mit Zyklenzahl κ_e*

(i) *existiert ein Routingspiel, für das $PoA \geq \kappa_e - 1$ gilt.*
(ii) *Für alle Routingspiele ist $PoA \leq c(\kappa_e^2 + \log^2 n)$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$.*

Wir werden im Folgenden den Beweis für die untere Abschätzung (i) führen und anschließend Teil (ii) für zweifach zusammenhängende Graphen zeigen. Der Beweis für allgemeine Graphen wird im darauffolgenden Abschnitt geführt.

Beweis von (i). Sei $Q = e_1, e_2, ..., e_{\kappa_e}$ ein Zyklus mit einfachen Kanten in G mit Länge κ_e. Wir konstruieren nun ein Routingspiel mit genau κ_e Spielern, wobei Spieler i die Kante $e_i = (u_i, v_i)$ zugeordnet wird. Dabei ist u_i der Ausgangspunkt und v_i das Ziel des Spielers i.
Es gibt also für jeden Spieler genau 2 Wege in Q; den nur aus $e_i = (u_i, v_i)$ bestehenden Vorwärts-Pfad und den aus den übrigen Kanten in Q bestehenden Rückwärts-Pfad.
Da Q nur einfache Kanten enthält, sind die optimalen sozialen Kosten für das Netzwerk $C = 1$. Dieser Fall tritt ein, wenn jeder Spieler seinen Vorwärts-Pfad nutzt.
Im schlimmsten Fall könnten alle Spieler ihren Rückwärts-Pfad wählen. Für dieses spezielle Routing $\bar{\mathbf{p}}$ ergeben sich soziale Kosten von $C' = \kappa_e - 1$, da jeder Spieler i alle Kanten in Q außer e_i genau einmal nutzt.

Wir werden nun durch Widerspruchsbeweis zeigen, dass $\bar{\mathbf{p}}$ ein Nash-Routing ist. Angenommen, ein Spieler k sei nicht lokal optimal, d.h. es gebe für ihn einen anderen Pfad p mit geringeren Kosten. Da jeder Pfad in $\bar{\mathbf{p}}$ eine Last von $\kappa_e - 1$ hat, müssen mindestens $\kappa_e - 2$ andere Spieler außer k jede Kante in Q nutzen. Falls p eine Kante in Q nutzt, so kann Spieler i sich nicht verbessert haben, denn seine Kosten ergeben sich wiederum zu $(\kappa_e - 2) + 1 = \kappa_e - 1$. Also kann der verbessernde Pfad p nur Kanten außerhalb von Q nutzen. Da $e_k \in Q$ (die direkte Verbindungskante von u_k nach v_k) nicht in Pfad p enthalten ist, muss p mindestens Länge 2 haben. Ersetzen wir nun e_k durch p, so erhalten wir wiederum einen Zyklus Q' mit einfachen Kanten. Dieser ist aber um mindestens eine Kante länger als Q, was ein Widerspruch ist. Damit muss $\bar{\mathbf{p}}$ ein Nash-Routing sein und wir erhalten mit der obigen Abschätzung das gewünschte Resultat $PoA \geq \kappa_e - 1$. $\square$

Wir widmen uns nun dem Beweis des zweiten Teils von Theorem 1.3. Dazu sei zunächst G zweifach zusammenhängend, das heißt zwischen je zwei Knoten existieren mindestens zwei kantendisjunkte Wege.

Behauptung. *Es gilt* $PoA \leq c(\kappa_e^2 + \log n)$.

Beweis. Wir betrachten den längsten Pfad p in G. Dieser habe die Länge L und führe von Knoten u zu v. Da G zweifach zusammenhängend ist, gibt es mindestens zwei kantendisjunkte Pfade p_1, p_2 von u nach v mit den Längen $l_1 \leq l_2$.
Wir können unseren längsten Pfad p nun folgendermaßen in Komponenten zerlegen: $p = \lambda_0\mu_1\lambda_1\mu_2...\mu_z\lambda_z$.
Dabei soll μ_i mindestens Länge 1 haben und nur aus Kanten des kürzeren Pfades p_1 bestehen, wogegen jede „Abweichung" λ_i keine einzige Kante von p_1 enthalten darf.
Folgende Grafik verdeutlicht die Zerlegung:

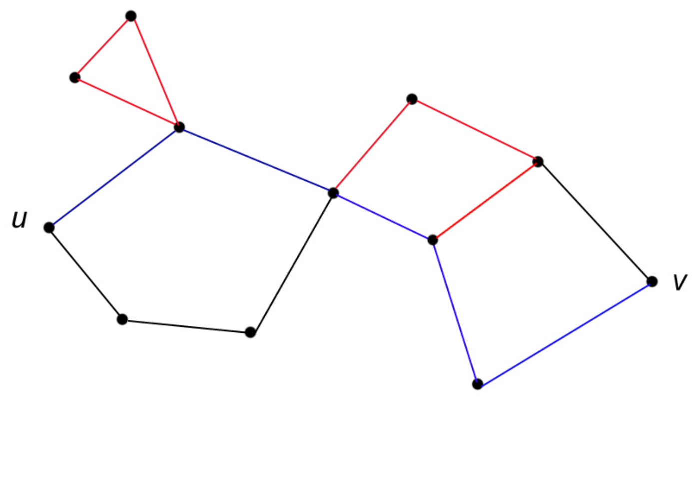

Abbildung 7.1: Zerlegung des längsten Pfades p; blau: Komponenten von p_1, rot: Abweichungen λ_i

Da nach Konstruktion jedes λ_i zwei (nicht zwangsläufig verschiedene) Knoten auf p_1 verbindet, gibt es einen einfachen Zyklus bestehend aus den Kanten von λ_i und der Verbindung zwischen den beiden Knoten auf p_1. Die Länge dieses Zyklus ist mindestens $|\lambda_i|$. Nach Konstruktion kann es insgesamt maximal l_1+1 Abweichungen λ_i geben, wobei für jede dieser Abweichungen $|\lambda_i| \leq \kappa_e$ gilt, da κ_e für die Länge des längsten Zyklus in G steht.
Damit lässt sich die Länge von p folgendermaßen abschätzen:

$$L \leq \kappa_e \cdot (l_1 + 1) + l_1$$

Aufgelöst nach κ_e erhalten wir $\kappa_e \geq (L+1)/(l_1+1) - 1$. Da p_1 und p_2 kantendisjunkt sind und daher zusammen einen Zyklus mit einfachen Kanten ergeben, gilt außerdem $\kappa_e \geq l_1 + l_2 \geq 2l_1$.
Damit haben wir insgesamt $\kappa_e \geq \max\{2l_1, (L+1)/(l_1+1) - 1\}$.
Wir nehmen nun an, es gelte $\kappa_e < \sqrt{2L} - \frac{3}{2}$. Da nach dem obigen $\kappa_e \geq 2l_1$ gilt, haben wir $l_1 < \sqrt{L/2} - \frac{3}{4}$ und damit

$$\begin{aligned}
\kappa_e &\geq \frac{L+1}{l_1+1} - 1 \\
&> \frac{L+1}{\sqrt{L/2} + \frac{1}{4}} - 1 \\
&= \frac{8L + 8 - (\sqrt{32L} + 2)}{\sqrt{32L} + 2} \\
&= \frac{(\sqrt{2L} - \frac{3}{2}) \cdot (\sqrt{32L} + 2) + 9}{\sqrt{32L} + 2} \\
&= \sqrt{2L} - \frac{3}{2} + \epsilon,
\end{aligned}$$

wobei $\epsilon = 9/(\sqrt{32L} + 2) > 0$. Dies ist ein Widerspruch zu unserer Annahme!
$\Rightarrow \kappa_e \geq \sqrt{2L} - \frac{3}{2}$.

Aus Theorem 1.2 kennen wir die Abschätzung $PoA \leq 2(l + \log n)$. Formen wir die eben gezeigte Ungleichung $\kappa_e \geq \sqrt{2L} - \frac{3}{2}$ nach L um ($L \leq \frac{(\kappa_e + 3/2)^2}{2}$), und beachten, dass $l \leq L$ für alle Pfadlängen l gilt, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
PoA &\leq 2(l + \log n) \\
&\leq 2\left(\frac{(\kappa_e + 3/2)^2}{2} + \log n\right) \\
&= (\kappa_e + 3/2)^2 + 2\log n \\
&\leq c \cdot (\kappa_e^2 + \log n),
\end{aligned}$$

mit z.B. $c = (\kappa_e + \frac{3}{2})^2$. $\square$

Wegen $n \geq 1$ folgt $PoA \leq c(\kappa_e^2 + \log n) \leq c(\kappa_e^2 + \log^2 n)$.
Damit ist Theorem 1.3 für zweifach zusammenhängende Graphen bewiesen. $\square$

8 Der Beweis für allgemeine Graphen

In diesem Abschnitt werden wir Theorem 1.3 (ii) für allgemeine Graphen beweisen. Dabei werden wir benutzen, dass jedes Nash-Routing in einem Graphen G auf ein partielles Nash-Routing in einem zweifach zusammenhängenden Teilgraphen von G abgebildet werden kann. In diesem Teilgraphen können wir dann wiederum Lemma 6.3 anwenden und damit die Behauptung zeigen.
Zunächst benötigen wir allerdings noch einige Definitionen:

8.1 Blockstruktur von Graphen

Sei $G = (V, E)$ ein beliebiger zusammenhängender Graph. Zwei Teilgraphen von G sind **adjazent**, falls sie mindestens einen gemeinsamen Knoten besitzen.
Ein zweifach zusammenhängender Teilgraph G' ist maximal, falls er nicht in einem größeren zweifach zusammenhängenden Graphen enthalten ist. Ein solcher Teilgraph wird auch **Block** genannt.
Als **Brücke** bezeichnen wir eine Kante, die G trennt.
Wir können G nun folgendermaßen in einen Baum bestehend aus Blöcken und Brücken zerlegen: $A = (V_A, E_A)$ sei der aus allen Blöcken und $B = (V_B, E_B)$ der aus allen Brücken von G bestehende Teilgraph.
Weiter seien $A_1, A_2, ..., A_\alpha$ die Blöcke von A (**Typ-A-Blöcke**). Zwei verschiedene Blöcke A_i, A_j können nicht adjazent sein, da sie sonst zusammen einen größeren zweifach zusammenhängenden Teilgraphen bilden würden, was aber ein Widerspruch zu ihrer Maximalität ist.
Mit $B_1, B_2, ..., B_\beta$ bezeichnen wir die verschiedenen Brücken von B. Wir werden sie im weiteren Verlauf **Typ-B-Blöcke** nennen.
Mit dem oben genannten Argument folgt, dass nur Blöcke mit verschiedenen Typen adjazent sein können. Diese wiederum sind nur über maximal einen Knoten miteinander verbunden, ansonsten könnte man einen größeren Zyklus in der Vereinigung der beiden Blöcke finden - im Widerspruch zur Maximalität der Typ-A-Blöcke. Mithilfe der Typ-A- und Typ-B-Blöcke können wir nun einen bipartiten[2] Graphen $H = V_H, E_H$ definieren. Dabei besteht $V_H = \{a_1, a_2, ..., a_\alpha, b_1, b_2, ..., b_\beta\}$ aus Knoten, die die einzelnen Blöcke repräsentieren: a_i steht für einen Typ-A-Block, b_i für einen Typ-B-Block. Die Kante $(a_i, b_j) \in E_H$ existiert genau dann, wenn die Blöcke A_i und B_j adjazent sind. Eine Bipartition von H ist dann durch $A = \{a_1, ..., a_\alpha\}$ und $B = \{b_1, ..., b_\beta\}$ gegeben.
H wird als **Block-Baum** von G bezeichnet.

[2] Ein Graph heißt bipartit, wenn er in zwei disjunkte Knotenmengen A und B geteilt werden kann, sodass die Knoten in A bzw. B untereinander nicht durch Kanten verbunden sind. (vgl. [11])

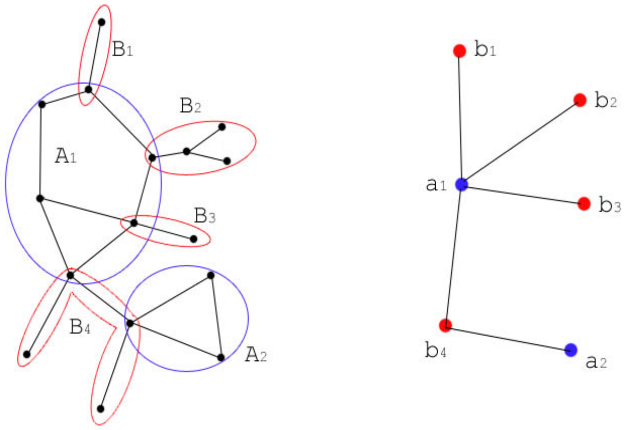

Abbildung 8.1: links: Graph mit verschiedenen Blöcken; rechts: Block-Baum H

8.2 Block-Teilpfade

Wir ordnen jedem Knoten in G einen Typen nach folgendem Schema zu: Gehört der Knoten zu einem Typ-A-Block, so erhält er den Typ A, gehört er zu einem Typ-B-Block, so erhält er Typ B. Liegt ein Knoten sowohl in einem Typ-A- als auch in einem Typ-B-Block, so bekommt er den Typ A. Genauso wird mit den Kanten verfahren, das heißt eine Typ-A-Kante gehört zu einem Typ-A-Block.
Sei $p = v_1, v_2, ..., v_k$ ein einfacher Pfad in G. Mit der obigen Typenunterteilung können wir nun p in Teilpfade $q_1, ..., q_r, |q_i| > 0$ für alle $i \in \{1, ..., r\}$ zerlegen. Dabei müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

(1) Die Teilpfade sind $q_1, ..., q_r$ sind kantendisjunkt.

(2) Alle Knoten eines Teilpfades q_i befinden sich im selben Block und haben denselben Typ, wobei q_i ebenfalls dieser Typ zugeordnet wird.

(3) Zwei aufeinander folgende Teilpfade haben unterschiedlichen Typ.

Da sowohl H als auch die Typ-B-Blöcke Bäume sind, muss jedes Paar einfacher Pfade mit demselben Start- und Zielknoten dieselbe Abfolge von Typ-B-Blöcken benutzen.
Betrachten wir ein Routingspiel R und ein Routing **p** mit Kosten C. Sei **p*** ein optimales Routing für R mit Kosten C^*. Dann muss jeder Pfad in **p** dieselben Typ-B-Kanten nutzen wie der entsprechende Pafd in **p*** und damit hat jede Typ-B-Kante dieselbe Last in **p** wie in **p***. Das bedeutet, dass Kanten in **p** mit höherer Last als C^* nur in einem Typ-A-Teilpfad auftauchen können.
Außerdem gilt, falls k Pfade einen Typ-A-Block verlassen, dass diese mindestens $\lceil k/C^* \rceil$ verschiedene Kanten von A_i nutzen müssen, da sonst mindestens eine Kante eine Last größer als C^* hätte, was dem eben Erwähnten widerspräche.
Wir fassen diese Erkenntnisse in einem Lemma zusammen:

Lemma 8.3

a) *Für jeden Pfad p, für den $C_p > C^*$ gilt, gibt es einen Typ-A-Teilpfad q mit $C_q = C_p$.*

b) *Verlassen k Pfade einen Typ-A-Block A_i, so nutzen diese Pfade mindestens $\lceil k/C^* \rceil$ verschiedene Kanten von A_i.*

8.3 Teilspiele

Sei $\mathbf{p}$ ein beliebiges Nash-Routing mit Kosten C. Für einen Typ-A-Block A_i seien $\mathbf{p}_{A_i} = \{p_1, ..., p_\gamma\}$ diejenigen Pfade in $\mathbf{p}$, die eine Kante in A_i nutzen. Die dazugehörigen Spieler bezeichnen wir mit N_{A_i}, wobei $|N_{A_i}| = \gamma$ gelten soll. Mit $Q_{A_i} = \{q_1, ..., q_\gamma\}$ beziehen wir uns auf die Typ-A-Teilpfade, wobei q_j Teilpfad von p_j für alle $j = 1, ..., \gamma$ ist.
Ein **Teilspiel** von R in Block A_i definieren wir als $R_{A_i} = (N_{A_i}, A_i, \{P_j^{A_i}\}_{j \in N_{A_i}})$, wobei $P_j^{A_i}$ alle Typ-A-Teilpfade von P_j enthält, die in A_i liegen und denselben Start- und Zielknoten wie q_j besitzen.
Ist q_j lokal optimal für Spieler j, so ist der dazugehörige Pfad p_j **zufriedenstellend** im Teilspiel R_{A_i}.

Lemma 8.5 *Sei $\mathbf{p}$ ein beliebiges Nash-Routing mit Kosten $C > C^*$ und Spieler i besitze einen Pfad p_i mit Kosten C_{p_i}. Dann ist Spieler i zufriedengestellt in einem Teilspiel R_{A_i} in einem Typ-A-Block A_i mit Kosten C_{p_i}.*

Beweis. Wir wissen aus Lemma 8.3, dass es für jeden Pfad p_i einen Typ-A-Teilpfad q_i gibt mit $C_{p_i} = C_{q_i}$. Angenommen, keiner dieser Teilpfade sei lokal optimal in den dazugehörigen Teilspielen. Dann wäre es für Spieler i möglich, in jedem Block stattdessen Pfade mit geringeren Kosten zu wählen. Wir würden also einen Teilpfad $q_{i,j}^*$ finden mit $C_{q_{i,j}^*} < C_{q_i}$ für alle j. Nach Lemma 8.3 gibt es dann einen Pfad p_i^* mit $C_{p_i^*} < C_{p_i}$ im Widerspruch zur lokalen Optmimalität von p_i. □

Wir wenden uns nun einem Routingspiel R und einem Nash-Routing $\mathbf{p}$ mit Kosten von C zu und zeigen, dass die Anzahl an nicht zufriedengestellten Spielern in jedem Typ-A-Block beschränkt ist. Aus Lemma 8.5 wissen wir bereits, dass jeder Spieler auf jeden Fall in einem Typ-A-Block zufriedengestellt ist. Dieser muss nicht zwangsläufig für alle Spieler derselbe sein, sodass es vorkommen kann, dass nur ein Teil der Spieler in dem Block optimal ist.
Wir definieren mit $F_{A_i}(C')$ die Menge der nicht lokal optimalen Spieler in einem Block A_i, deren Kosten mindestens C' betragen. Außerdem seien mit C_{A_i} die Gesamtkosten des Blocks A_i bezeichnet.

Lemma 8.6 *Sei $C > C^* + x(1 - \log n)$ für ein $x > 0$. Dann existiert ein Typ-A-Block A_i mit Kosten $C_{A_i} \geq C - x \log n$ und $|F_{A_i}(C_{A_i} - x)| \leq 2C^*$ (das heißt höchstens $2C^*$ Spieler sind in Block A_i nicht lokal optimal).*

Beweis. Sei $C > C^* + x(1 - \log n)$. Wir führen den Beweis per Widerspruch. Wir nehmen also an, es gelte für jeden Typ-A-Block A_i mit Kosten $C_{A_i} \geq C - x \log n$, dass die Anzahl der nicht lokal optimalen Spieler $|F_{A_i}(C_{A_i} - x)|$ größer sei als $2C^*$. Da **p** ein Nash-Routing ist, ist jeder Spieler mit Kosten $C > C^*$ in mindestens einem Typ-A-Teilspiel von R lokal optimal, das heißt es gibt mindestens einen Typ-A-Block A_i mit $C_{A_i} = C$.

Wir bilden nun einen Typ-A-Baum H_a aus den Knoten $a_1, a_2, ..., a_\alpha$ der zugehörigen Typ-A-Blöcke $A_1, ..., A_\alpha$, die folgende Bedingungen erfüllen sollen:

(1) $C_{A_i} - x > C^*$,

(2) $|F_{A_i}(C_{A_i} - x)| > 2C^*$.

Als Wurzel wählen wir den Knoten a_1. Hier ein Beispiel für einen so entstandenen Typ-A-Baum:

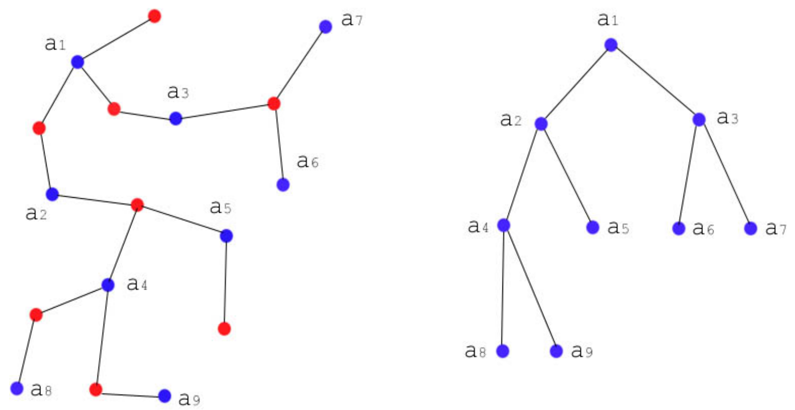

Abbildung 8.2: Block-Baum und resultierender Typ-A-Baum H_a

Nach Voraussetzung gilt für jeden dieser Blöcke $|F_{A_i}(C_{A_i} - x)| > 2C^*$. Wegen $C - x = C_{A_i} - x > C^*$ haben alle nicht lokal optimalen Spieler im Teilspiel R_{A_1} Kosten von mindestens $C - x$. Da sie in mindestens einem Typ-A-Block optimal sein müssen, führen ihre Pfade aus A_1 hinaus und in einen anderen Typ-A-Block hinein.
Dabei nutzen alle diese $k = |F_{A_1}(C_{A_1} - x)|$ Spieler nach Lemma 8.3b wegen $\lceil k/C^* \rceil > \lceil 2C^*/C^* \rceil = 2$ mindestens 3 verschiedene Typ-B-Kanten, die aus A_1 hinausführen (sie dürfen im selben Typ-B-Block liegen!).
Da H_a ein Baum ist, kann jeder Knoten maximal einen Vater (Vorgängerknoten) haben. Damit hat ein Knoten, der die beiden oben genannten Bedingungen erfüllt, mindestens 2 Kinder (Nachfolgerknoten). Erfüllt er die Bedingungen nicht, so muss er ein Blatt sein.

Fangen wir mit Knoten a_1 (das heißt im dazugehörigen Block A_1) an, so lässt sich H_a Stück für Stück erweitern. Je weiter wir uns von a_1 entfernen, desto größer wird die **Tiefe** d des Baumes (angefangen bei a_1 mit $d = 0$).

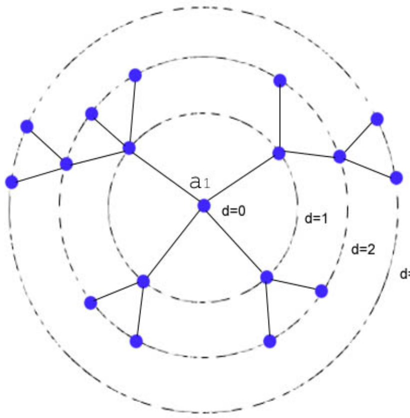

Abbildung 8.3: Konstruktion des Baumes H_a mit Startblock A_1

Bevor wir mit dem Beweis von Lemma 8.6 fortfahren können, benötigen wir noch die folgende Behauptung:

Behauptung 8.7 *Ein Knoten mit Tiefe $d \leq \log n$ kann kein Blatt sein.*

Beweis. Sei α ein zum Block A_α gehörender Knoten mit Tiefe d. Wir zeigen $C_{A_\alpha} \geq C - d \cdot x$ per Induktion nach d.
Für $d = 0$ ist die Behauptung trivial, da $C_{A_\alpha} = C$. Sei also $d > 0$.
Der Vater V_α von A_α hat Tiefe $d - 1$. Damit gilt $C_{V_\alpha} \geq C - (d-1)x$ nach Induktionsannahme.
A_α hat höchstens so hohe Kosten wie V_α, da nach Konstruktion von H_a keine weiteren Kosten dazukommen können. Das heißt wir haben
$C_{A_\alpha} \geq C_{V_\alpha} - x \geq C - (d-1) \cdot x - x = C - d \cdot x$.
Es ist also $C_{A_\alpha} \geq C - d \cdot x$ und wegen $d \leq \log n$ und der Voraussetzung
$C > C^* + x(1 + \log n)$ aus Lemma 8.6 erhalten wir $C_{A_\alpha} - x \geq C - (1 + \log n) \cdot x > C^*$. Damit ist Bedingung (i) erfüllt.
Außerdem haben wir $C_{A_\alpha} \geq C - x \log n$ und nach unserer Annahme ist dann $|F_{A_\alpha}(C_{A_\alpha} - x)| > 2C^*$, womit auch Bedingung (ii) erfüllt ist. Damit hat α Kinder und kann kein Blatt sein.

Wir können nun den Beweis von Lemma 8.6 fortführen. Da H_a endlich ist und somit Blätter hat, muss die Tiefe von H_a nach dem eben erhaltenen Resultat mindestens $1 + \log n$ sein. Da außerdem jeder Knoten bis zur Tiefe $\log n$ mindestens zwei Kinder besitzt, ist die Anzahl der Gesamtknoten in H_a größer als $2^{\log n} = n$. Dies ist aber ein Widerspruch, da H_a nach Konstruktion nicht mehr Knoten als G haben kann. $\square$

Erinnern wir uns an Theorem 1.3(ii), dessen endgültiger Beweis noch aussteht:

Theorem 1.3(ii) *Für alle Routingspiele ist* $PoA \leq c(\kappa_e^2 + \log^2 n)$ *für eine Konstante* $c \in \mathbb{R}$.

Wir setzen unser x aus Lemma 8.6 auf $x = 2\log n$ und betrachten zwei Fälle.
1. Fall: Sei $C \leq C^* + x(1 + \log n)$.
Dann gilt $C/C^* \leq 1 + 2\log n(1 + \log n)/C^* \leq c \cdot \log^2 n$ für alle C mit einer Konstante $c \in \mathbb{R}$, also insbesondere auch für $PoA = C'/C^*$ für ein entsprechendes C', das aus dem schlechtesten Nash-Gleichgewicht resultiert.
2. Fall: Wenden wir uns also dem Fall $C > C^* + x(1 + \log n)$ zu. Nach Lemma 8.6 existiert ein Typ-A-Block A_i mit $C_{A_i} \geq C - x \cdot \log n = C - 2\log^2 n$ und $|F_{A_i}(C_{A_i} - 2\log n)| \leq 2C^*$.
Wir erinnern uns nun an Lemma 6.3, dessen Aussage $C < 2l \cdot (C^* + |F(C - 2\log n)|) + 2\log n$ lautete, und wenden dieses auf unser Teilspiel R_{A_i} im Block A_i an.
Wir erhalten dann

$$C_{A_i} < 2L \cdot (C^*_{A_i} + |F_{A_i}(C_{A_i} - 2\log n')|) + 2\log n',$$

wobei L für die Länge des längsten einfachen Pfades im Teilspiel R_{A_i} steht, n' für die Anzahl der Knoten in A_i und $C^*_{A_i}$ für die minimalen Kosten in R_{A_i}.
Wir bemerken, dass $n' \leq n$ und $C^* \geq C^*_{A_i}$ gelten muss, da das Teilspiel R_{A_i} maximal so viele Knoten und höchstens so große Kosten wie das gesamte Spiel R haben kann. Das führt uns zu

$$C - 2\log^2 n < 2L(C^* + |F_{A_i}(C_{A_i} - 2\log n)|) + 2\log n \leq 2L(C^* + 2C^*) + 2\log n.$$

Wir wissen aus Lemma 7.1, dass $\kappa_e \geq \sqrt{2L} - \frac{3}{2}$ und damit $\kappa_e^2 \geq 2L - 3\sqrt{2L} + \frac{9}{4}$ gilt. Damit ist $L \leq c' \cdot \kappa_e^2$ für eine Konstante c'. Eingesetzt in die obige Abschätzung liefert uns das

$$C \leq 2(c' \cdot \kappa_e^2) \cdot 3C^* + 2\log n + 2\log^2 n.$$

Teilen wir nun noch durch C^*, so erhalten wir mit einer genügend großen Konstante c das gewünschte Resultat $PoA = C/C^* \leq c(\kappa_e^2 + \log^2 n)$ und schließen den Beweis von Theorem 1.3 (ii) ab. $\square$

9 Diskussion und Ausblick

An dieser Stelle fassen wir noch einmal unsere Hauptresultate zusammen und machen uns deren Bedeutung in realen Verkehrssystemen klar.
Wir konnten in Theorem 1.1 zeigen, dass jedes Routing in endlicher Zeit gegen ein Nash-Gleichgewicht konvergiert. Für die Realität bedeutet das, dass jeder Verkehrsteilnehmer so lange seine Route ändern wird, bis er die maximale Anzahl der anderen Verkehrsteilnehmer auf einer Teilstrecke seiner Route durch die Wahl einer anderen Route nicht mehr verringern kann. Jeder findet also in endlicher Zeit einen für ihn lokal optimalen Weg durch das System.
Wir konnten außerdem beweisen, dass eines dieser Nash-Gleichgewichte mit der optimalen Lösung für alle Spieler übereinstimmt. Im besten Fall heißt das für

die Realität, dass sich durch das Verhalten der Verkehrsteilnehmer ein Gleichgewichtszustand einstellen kann, der einer globalen optimalen Lösung für alle entspricht.

Die Theoreme 1.2 und 1.3 konnten schließlich zeigen, dass selbst das ungünstigste Gleichgewicht durch eine untere und eine obere Schranke abgeschätzt werden kann. Wir erinnern uns an die Aussage von Theorem 1.3:

$$\kappa_e - 1 \leq PoA \leq c(\kappa_e^2 + \log^2 n).$$

Die Güte der möglichen Gleichgewichte ist demnach abhängig von der Länge des längsten Zyklus und der Knotenzahl des Verkehrsnetzes.

Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass alle Resultate nur aufgrund gewisser Annahmen über das Verkehrsmodell zu erzielen waren. Dazu zählt zum Einen, dass wir das Netz als ungerichteten und zusammenhängenden Graphen identifizieren, zum Anderen messen wir die Kosten anhand der maximalen Verkehrsteilnehmerzahl auf einer Teilstrecke (Kante) des Netzes.
Ein weiterer wesentlicher Bestandteil des Modells ist, dass alle Pfade nur einfache Kanten enhalten. Dies macht insofern Sinn, als dass Verkehrsteilnehmer auf ihrem Weg nicht ein und dieselbe Strecke mehrfach entlangfahren werden.
Sämtliche Beweise funktionieren analog für Pfade mit einfachen Knoten, wobei als Messgröße für die Kosten die maximale Knotenlast herangezogen wird und die Abschätzung aus Theorem 1.3 in Bezug auf die Länge des längsten Zyklus mit einfachen Knoten gegeben ist.

Die Autoren vermuten, dass die obere Schranke für den Price of Anarchy sogar noch bis auf die untere Schranke herabgesetzt werden kann, sodass letztendlich $PoA = \kappa_e - 1$ gilt. Allerdings lassen sie diese Hypothese offen. Stattdessen weisen sie auf andere interessante Fragestellungen hin, beispielsweise ob ähnliche Resultate erzielt werden können, wenn man die Kanten des Verkehrsnetzes gewichtet oder wenn die Auslastung entlang einer Kante nicht linear von der Verkehrsteilnehmerzahl abhängt. Unter Berücksichtigung dieser Annahmen könnte man realitätsnähere Aussagen über die Verkehrsentwicklung in Straßennetzen treffen und damit einen entscheidenden Beitrag zur Vermeidung von Staus leisten.
Als weiteren Ausblick nennen C. Busch und M. Magdon-Ismail die Abschätzung der Zeit, die bis zu einem Gleichgewichtszustand vergeht. Dabei sei auf die Arbeit von Ron Banner und Ariel Orda [10] verwiesen, die gezeigt haben, dass das Finden eines Nash-Gleichgewichts mit minimalen sozialen Kosten ein NP-schweres Problem ist. Dagegen ist die Komplexität der Berechnung beliebiger Nash-Gleichgewichte noch nicht genauer untersucht worden.
Interessant ist auch die Frage nach der Vermeidung von Staus, wenn die Verkehrsteilnehmer nicht auf das Verhalten der anderen reagieren, sondern unabhängig handeln. Dieses Problem wurde beispielsweise in [14-16] studiert und ist vor allem für Straßensysteme interessant, auf denen ständig neue Verkehrsteilnehmer anzutreffen sind.
Auch hier bleibt noch viel Raum für zukünftige Forschung.

10 Quellenangaben und Literaturverzeichnis

[1] George Christodoulou and Elias Koutsoupias - „The price of anarchy of finite congestion games“, Proceedings of the 37th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC) Baltimore, MD, USA, ACM (Mai 2005), S. 6773.

[2] José R. Correa, Andreas S. Schulz and Nicolás E. Stier Moses - „Computational complexity, fairness, and the price of anarchy of the maximum latency problem“, Proc. Integer Programming and Combinatorial Optimization, 10th International IPCO Conference New York, NY, USA, Lecture Notes in Computer Science vol. 3064, Springer (Juni 2004), S. 5973.

[3] Tim Roughgarden - „The maximum latency of selfish routing“, Proceedings of the Fifteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA), New Orleans, Louisiana, (USA), Januar 2004, S. 980981.

[4] Seminarausarbeitung „Der Price of Anarchy für dezentral geplante Netzwerke“ von Bobo Nick, Konstanz (November 2005), http://www.inf.uni-konstanz.de/algo/lehre/ws05/mna/ausarbeitungen/nick.pdf.

[5] Diplomarbeit von Bobo Nick über „Nash-Gleichgewichte in Netzwerk-Verbindungsspielen“ (Oktober 2007), http://kops.ub.uni-konstanz.de/volltexte/2009/7276/pdf/Dipl_Nick.pdf.

[6] Mendelson, Elliot - „Introducing Game Theory and its Applications“, Chapman and Hall/CRC, 2004.

[7] Siegfried K. Berninghaus, Karl-Martin Ehrhart and Werner Güth - „Strategische Spiele- Eine Einführung in die Spieltheorie„, Springer (2010).

[8] Manfred J. Holler und Gerhard Illing - „Einführung in die Spieltheorie“, Springer (Oktober 2008), S. 1.

[9] Elias Koutsoupias und Christos Papadimitriou - „Worst-case Equilibria“, Trier, in: LNCS, Band 1563, Springer (März 1999), S. 404-413.

[10] Ron Banner, Ariel Orda - „Bottleneck routing games in communication networks“, IEEE Journal on Selected Areas in Communications 25(6) (2007), S. 1173-1179.

[11] PD Dr. Raymond Hemmecke, Vorlesungsskript zur Algorithmischen Diskreten Mathematik, Version vom 28. April 2009, S. 10.

[12] Angelika Steger - „Diskrete Strukturen“, Band 1: Kombinatorik, Graphentheorie, Algebra, Springer (2007), S. 24.

[13] Reinhard Distel - „Graphentheorie“, Springer (2006), S. 74.

[14] Yossi Azar, Edith Cohen, Amos Fiat, Haim Kaplan, Harald Racke - „Optimal oblivious routing in polynomial time“, Proceedings of the 35th annual ACM symposium on Theory of computing, 9.-11. Juni 2003, San Diego, USA.

[15] Marcin Bienkowski, Miroslaw Korzeniowski, Harald Räcke - „A practical algorithm for constructing oblivious routing schemes“, Proceedings of the 15th annual ACM symposium on Parallel algorithms and architectures, 7.-9. Juni 2003, San Diego, USA.

[16] Chris Harrelson, Kirsten Hildrum, Satish Rao - „A polynomial-time tree decomposition to minimize congestion“, Proceedings of the 15th annual ACM symposium on Parallel algorithms and architectures, 7.-9. Juni 2003, San Diego, USA.